

プラズマ物理学 I 講義メモ (第 13 回)

(担当: P 研 渡邊智彦; 2014.7.26 作成)

9.3 磁気流体平衡

ここでは磁気流体 (MHD) 方程式が与える力学的平衡状態について考察しよう。運動方程式において、定常で流れのない状態を考えると、Lorentz 力と圧力勾配が釣り合った状態が得られる。

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (1)$$

これを $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ を使って少し変形すると、

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (2)$$

となる。簡単のためにまっすぐな磁力線を考えると、上式の右辺は無視でき、 $p + (1/2\mu_0)B^2 = \text{const.}$ となる。これは圧力と磁気圧の勾配が釣り合った状態を意味する。たとえば、太陽黒点では $10^3 \text{ Gauss} (= 0.1T)$ を超える磁場があるが、その磁気圧のために圧力すなわち温度が $1000\text{K} \sim 2000\text{K}$ 程度低下すると見積もられる。

上記の圧力と磁気圧の釣り合いは、流体力学における Bernoulli の定理によく似ている。流れによる移流項から得られる動圧 ($\rho U^2/2$) と圧力勾配の釣り合いから

$$\nabla \left(p + \rho \frac{U^2}{2} \right) = \rho \mathbf{U} \times \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

ここでは大まかな議論を簡単に進めるため密度 ρ は一定とした。また $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U}$ は渦度を表す。ここに Lorentz 項の寄与を加えると、 $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}$ が無視でき、かつ、渦なし $\boldsymbol{\omega} = 0$ の場合、

$$\nabla \left(p + \rho \frac{U^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (4)$$

のように圧力、動圧、磁気圧の和が一定となる。その具体的な例は、太陽風と地球磁場がぶつかる磁気圏前面に見られる。太陽風密度を $n \sim 5 \times 10^6 \text{ m}^{-3}$ 、速度を $U \sim 300 \text{ km/s}$ とし、 p は無視できるとすると、およそ地球半径の 10 倍程度の距離において磁気圧と動圧が釣り合うと見積もられる。衛星観測において、同程度の位置に磁気圏境界が観測されている。

流れのない MHD 平衡についてもう少し考察してみよう。式 (1) から、

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0 \quad (6)$$

がともに成り立っていることが分かる。これは、圧力の等値面がある時、磁場と電流はそれに沿っていることを示している。特に一群の磁力線が曲面を構成する場合、これを磁気面と呼ぶ。すなわち、磁力線によって覆われているプラズマの等圧面は磁気面に一致し、さらに電流もそれに沿って流れる。

この MHD 平衡を作る電流は、磁力線に平行および垂直成分に分けられる。後者は反磁性電流と呼ばれ、

$$\mathbf{J}_\perp = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (7)$$

で与えられる。この表式から反磁性電流は、8.5 節で議論した反磁性ドリフトによってつくられていることが分かる。

一方、圧力勾配がない場合には、磁力線平行方向の電流によって平衡磁場がえられる。この場合、Lorentz 力と圧力勾配が共にゼロとなるため、force-free 状態と呼ばれる。つまり、 $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = 0$ から、 $\mathbf{J} \parallel \mathbf{B}$ となるので比例係数を α とおくと、force-free 状態は、 $\nabla \times \mathbf{B}$ の固有値問題

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \quad (8)$$

の解として与えられる。この force-free 状態は、プラズマが示す異なる固有状態間の遷移現象 (MHD 緩和現象) とも関連して興味深い。

9.4 Alfvén 波

次に MHD プラズマにおける基本的な波について議論しよう。一様磁場 $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}$ が z 方向にあり、プラズマ圧力は無視できるとする。速度場の擾乱は x 方向にあり ($\mathbf{U}_1 = U_{1x} \hat{x}$)、 z 方向に伝播する平面波を考える。この時、速度の擾乱成分は非圧縮 ($\nabla \cdot \mathbf{U}_1 = 0$) となるので、背景密度 ρ_0 を一様とすると、 $\rho_1 = 0$ としてよく、ここで連続の式を考える必要はない。そこで解くべき線形化された MHD 方程式は、

$$\rho_0 \frac{\partial U_{1x}}{\partial t} = J_{1y} B_0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial z} = \mu_0 J_{1y} \quad (10)$$

$$\frac{\partial B_{1x}}{\partial t} = \frac{\partial E_{1y}}{\partial z} \quad (11)$$

$$E_{1y} = U_{1x} B_0 \quad (12)$$

これらをまとめると、

$$\frac{\partial^2 U_{1x}}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 U_{1x}}{\partial z^2} \quad (13)$$

という波動方程式を得る。ここで

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho_0}} \quad (14)$$

を Alfvén 速度, 式 (13) で記述される波を Alfvén 波と呼ぶ。分散関係式は, $\omega^2 = k^2 V_A^2$ となる。

Alfvén 波は, 背景の磁場を横切る方向にプラズマが運動し, それに凍結した磁場の変動が磁力線に沿って伝わる横波である。磁場擾乱は, イオンの慣性が生み出す分極ドリフトによる電流からつくられていることが分かる。

$$J_{1y} = \frac{\rho_0}{B_0^2} \frac{\partial E_{1y}}{\partial t} = en \frac{1}{e B_0^2} \left(-m_i \frac{\partial U_1}{\partial t} \times B_0 \right) \quad (15)$$

Alfvén 波は, MHD における最も基本的な波である。自然界では, オーロラや磁気嵐にともなう磁気擾乱の伝播や, 太陽コロナ中の磁場変動などにともなって観測される。

9.5 磁気音波

ここでは一様磁場 $B_0 = B_0 \hat{z}$ に垂直な x 方向に伝わる磁気音波を考えよう。Alfvén 波と異なり, 磁気音波は $\nabla \cdot U_1 \neq 0$ の縦波である。この場合, 圧縮による密度変化およびそれにともなう圧力変化も考慮する。磁気音波を記述する方程式は, 以下の線形化 MHD 方程式から導かれる。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial U_{1x}}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\rho_0 \frac{\partial U_{1x}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + J_{1y} B_0 \quad (17)$$

$$\frac{p_1}{\rho_0} = \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0} \quad (18)$$

$$-\frac{\partial B_{1z}}{\partial x} = \mu_0 J_{1y} \quad (19)$$

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} = -\frac{\partial E_{1y}}{\partial x} \quad (20)$$

$$E_{1y} = U_{1x} B_0 \quad (21)$$

これらをまとめると次の波動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 U_{1x}}{\partial t^2} = (C_s^2 + V_A^2) \frac{\partial^2 U_{1x}}{\partial x^2} \quad (22)$$

ここで, $C_s = \sqrt{\gamma T / m_i}$ であり, 磁気音波の分散関係式は, $\omega^2 = k^2 (C_s^2 + V_A^2)$ となる。磁場 B_0 が無い場合は, 磁気音波は通常の音波になる。磁場があるブ

ラズマでは、磁気圧のためにより大きな復元力を持つので、より速い位相速度となる。

MHD プラズマには、この他にも磁力線方向に主に伝わる音波も存在する。より一般には、これらの音波は斜め伝播し、位相速度の大きな速い磁気音波 (fast mode) と位相速度の小さな遅い磁気音波 (slow mode) の 2 種類が存在する。