プラズマ物理学 I　講義メモ (第 12 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.7.22 作成)

9　磁気流体方程式

この節では, 磁場のある場合の巨視的なプラズマ現象を扱う流体方程式について議論しよう. 以前に議論した電子, イオンそれぞれの成分についての流体方程式を出発点として, より長い時間・空間スケールを扱うために磁気流体 (MHD) 方程式を導出する. またそこから導かれる磁気流体平衡や磁気流体波について考察する.

9.1　磁気流体方程式の導出

s 種の粒子に対する流体方程式として, 連続の式と運動方程式は以下のように導かれた (第 4 節参照)

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \boldsymbol{u}_s) = 0 \ , \tag{1}$$

$$m_s n_s \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} + \boldsymbol{u}_s \cdot \nabla \boldsymbol{u}_s \right) = -\nabla p_s + q_s n_s (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_s \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{R}_s \ . \tag{2}$$

ここで, s は電子またはイオンを表し, MHD では電子とイオンの質量比 $m_e/m_i \ll 1$ として, 近似を行う. まず, ゆっくりした時間変化と Debye 長よりも十分長い空間スケールを考えると, 準中性条件が精度よくなりたち, $n = n_e = n_i$ とできる. 次に, 電子とイオンをあわせた質量密度を $\rho = n_i m_i + n_e m_e = n(m_e + m_i) \approx n m_i$ として定義する. 電子・イオンそれぞれの連続の式の和を取ると,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{U}) = 0 \ , \tag{3}$$

という一流体の連続の式を得る. ここで $\boldsymbol{U}$ は重心系の流速であり, $\rho \boldsymbol{U} \equiv \sum_s n_s m_s \boldsymbol{u}_s \approx n m_i \boldsymbol{u}_i$ として定義される.

運動方程式においても, 電子とイオンについての和をとると, 電子の慣性項への寄与はイオンに比べて無視できるので,

$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \boldsymbol{U} \cdot \nabla \boldsymbol{U} \right) = -\nabla p + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \ . \tag{4}$$

ここで, $p = p_i + p_e$, $\boldsymbol{J} = \sum_s q_s n_s \boldsymbol{u}_s$ であり, $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{R}_s$ の項はイオンと電子について和をとることでそれぞれ打ち消し合う. その結果, 右辺には圧力勾配による力と電流密度 $\boldsymbol{J}$ を介して作用する Lorentz 力が残る. 圧力 p を決めるにはエネルギー方程式を解くべきであるが, イオンと電子の温度が異なる場合な

どを考えると一般的な取り扱いは難しい．実際には, 簡単なモデルとして, 一流体の断熱法則

$$p = C\rho^\gamma \tag{5}$$

(または, そこに非等方圧力を入れた拡張) を用いることが多い.

電磁場揺動を求めるには Maxwell 方程式を使う．Faraday の誘導方程式は, そのままの形で用いる.

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{6}$$

一方, MHD の時間変化のスケールは, 電磁波が伝播するのに要する時間よりも十分長いと仮定すると, 変位電流を無視した Ampère の法則を用いることができる.

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}\ . \tag{7}$$

ここで無視した項, $(1/c^2)\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ の大きさを評価してみよう.

$$\frac{|(1/c^2)\partial\boldsymbol{E}/\partial t|}{|\nabla \times \boldsymbol{B}|} \sim \frac{1}{c^2}\frac{E/T}{B/L} \sim \frac{U^2}{c^2} \ll 1 \tag{8}$$

ここで, $U \sim L/T$, L と T は MHD の特徴的な空間および時間スケールであり, またこれは $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト速度と同程度であることを用いた．この 2 番目の仮定は, この後に確かめられる．非相対論的な流れ場をもつ MHD プラズマでは, 変位電流を無視することが妥当であることが分かる.

最後に方程式系を閉じるには, 電子の運動方程式を用いる．慣性項は無視できるので,

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{en}(\nabla p + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}) + \eta\boldsymbol{J} \tag{9}$$

ここで, $\boldsymbol{u}_e = -\boldsymbol{J}/en + \boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{u}_i \approx \boldsymbol{U}$, $-\boldsymbol{R}_e/en = -\nu_{ei}m_e n(\boldsymbol{u}_e - \boldsymbol{u}_i)/en = (\nu_{ei}m_e/e^2n)\boldsymbol{J} = \eta\boldsymbol{J}$ を用いた．さらに, (9) 式の右辺第 2 項は次のようなオーダー評価により $\omega \ll \Omega_i$ では無視できることがわかる.

$$\frac{|\nabla p|/en}{|\boldsymbol{E}|} \sim \frac{|\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}|/en}{|\boldsymbol{E}|} \sim \frac{\rho\omega U}{enE} \sim \frac{m_i\omega}{eB}\frac{U}{E/B} \sim \frac{\omega}{\Omega_i} \ll 1 \tag{10}$$

結局, 電子の運動方程式から

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{B} + \eta\boldsymbol{J} \tag{11}$$

を得る．これは磁気流体方程式の Ohm 則を与える．抵抗 $\eta = 0$ の時, プラズマの磁力線垂直方向の速度は,

$$\boldsymbol{U}_\perp = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \tag{12}$$

となり, $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト速度に一致することが分かる．これは, $\omega \ll \Omega_i$ においては自然な帰結である．一方, (9) 式 (またはこれに電子慣性項を残した式) は一般化された Ohm 則と呼ばれる.

9.2　磁束の凍結

これまでにも議論したように, 高温プラズマ中では衝突効果は非常に小さい. このため前節の (12) 式において, 抵抗 $\eta = 0$ とするモデルがしばしば用いられる. これを理想磁気流体 (ideal MHD) モデルとよぶ. 理想磁気流体方程式は, エネルギー以外にもいくつかの保存量をもつ. 磁束の保存はその中でも興味深い例の一つであり, また, プラズマの運動に大きく影響する.

流れ場 $\boldsymbol{U}$ で運動する MHD プラズマ中で, ある閉曲線 C で囲まれた曲面 S を貫く磁束は, プラズマの運動にともなって保存される. これはあたかも磁束がプラズマに凍り付いているように見なされるため, “磁束の凍結” と呼ばれる. すなわち, 磁束を $\Phi(t) = \int_{S(t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \cdot d\boldsymbol{s}$ としたとき ($d\boldsymbol{s}$ は S の面要素ベクトル),

$$\frac{d\Phi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{S(t+\Delta t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t+\Delta t) \cdot d\boldsymbol{s} - \int_{S(t)} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) \cdot d\boldsymbol{s} \right] = 0 \tag{13}$$

が成り立つ. ここで, プラズマの運動にともなって面積 $S(t)$ は移動・変形し, また一般には $\boldsymbol{B}$ も時間変化するが, それでも Φ は保存される. この証明には, 上式の $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t+\Delta t)$ を時間について 1 次まで展開した後, 理想 MHD の Ohm 則 [(12) 式] と Faraday の誘導方程式, さらに $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ と Gauss の定理を用いればよいが, これは課題に残しておこう.

この磁束の凍結は, 流体力学における循環の保存に対応している. よく知られているように, barotropic な [すなわち, $\rho = \rho(p)$ と書ける] 完全流体における渦度方程式は,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega}) \tag{14}$$

となる. これは, 理想 MHD の Ohm 則と Faraday の式から得られる関係式

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times (\boldsymbol{U} \times \boldsymbol{B}) \tag{15}$$

と見事に対応している.