プラズマ物理学 I　講義メモ (第 11 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.7.14 作成)

8.2　非一様磁場によるドリフト (つづき)

磁場強度に非一様性があると, その勾配に比例した大きさをもつドリフトが生じる. これを磁場勾配 (∇B) ドリフトとよび, 曲率ドリフトとともに現れる. ここでは, 簡単のために直線状の磁場を $\boldsymbol{B} = B(y)\hat{z}$ のように仮定する. $\hat{z}$ は z 方向の単位ベクトルとし, 磁場はそれに平行方向を向き, その強度は y 方向に変化する. ジャイロ中心 $\boldsymbol{x}_G$ のまわりで $\boldsymbol{B}$ を展開すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) &= B(\boldsymbol{x}_G)\hat{z} + \boldsymbol{\rho}\cdot\nabla B\big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_G}\hat{z} + \cdots \\ &\approx B(\boldsymbol{x}_G)\hat{z} + \rho_y \left.\frac{\partial B}{\partial y}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_G}\hat{z}\end{aligned} \tag{1}$$

と書ける. 上式で, $\boldsymbol{\rho}$ はジャイロ半径ベクトルで, $\boldsymbol{\rho} = \hat{b}\times\boldsymbol{v}/\Omega$ である (ここでは, $\hat{b} = \hat{z}$). 電場ゼロで磁場のみを考えると, 磁力線垂直方向の運動方程式は,

$$m\dot{\tilde{\boldsymbol{v}}}_\perp = q(\tilde{\boldsymbol{v}}_\perp + \boldsymbol{v}_{\nabla B})\times B \tag{2}$$

と表されよう. ここで, $\boldsymbol{v}_{\nabla B}$ は磁場勾配により磁力線を横切ってゆっくりドリフトする速度を示す. ジャイロ運動にともなう速い変動 ($\tilde{\boldsymbol{v}}$ の 1 次の項) については時間平均すると落とせる. 一方, $\tilde{\boldsymbol{v}}_\perp\times(\boldsymbol{\rho}\cdot\nabla B)\hat{z}$ については, 時間平均で残る成分がある. 少し計算すると, ドリフト速度は次のように与えられることが分かる

$$\boldsymbol{v}_{\nabla B} = \frac{v_\perp^2}{2\Omega}\hat{b}\times\frac{\nabla B}{B}\ . \tag{3}$$

一般の磁場の場合, 曲率ドリフトと磁場勾配ドリフトをあわせて,

$$\boldsymbol{v}_d = \boldsymbol{v}_c + \boldsymbol{v}_{\nabla B} = \frac{\hat{b}}{\Omega}\times\left(v_\parallel^2\boldsymbol{\kappa} + \frac{v_\perp^2}{2}\frac{\nabla B}{B}\right)\ . \tag{4}$$

と表される.

8.3　ミラー力

磁場に不均一性があると, 磁場を横切るドリフト運動だけでなく磁場に沿った運動も影響をうける. 今, z 軸方向を向いた磁場があり, その強度が $z > 0$ に向かってゆっくりと増加する状況を考える. 簡単のため, z 軸まわりについて回転対称とし, z 軸近傍での粒子運動を議論する. 磁場強度の増加をともなうため, 磁場ベクトルは z 方向から内向きにやや傾き, r 成分をもつはずである.

これは, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ の z 成分を作り出す．ジャイロ運動にともなって $(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_z$ の時間平均がどのようになるか見てみよう．回転の向きと電荷の符号に注意すると, $q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_z = -qv_\theta B_r = |q|v_\perp B_r$ となる．つまり, 電荷の符号によらない．この時, $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ の条件から, $B_r = -(r/2)(\partial B_z/\partial z)$ となるので, ジャイロ運動する荷電粒子には, 平均的に

$$\boldsymbol{F}_{mirror} \equiv -\frac{mv_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial z}\hat{z} = -\mu \nabla_\parallel B \tag{5}$$

の力が働くことがわかる． ここで, $\boldsymbol{F}_{mirror}$ をミラー力, 右辺にある $\mu = mv_\perp^2/2B$ を磁気モーメントと呼ぶ． 電荷の符号に関わらず, ミラー力は磁場の強い方向から弱い方向に向けて磁力線に沿って働く．

8.4 磁気モーメント

磁気モーメント μ は, 磁場中での荷電粒子のドリフト運動を考える際に重要な概念である．名前の由来は, $\mu = IS$ と表されることによる．ここで I は荷電粒子のジャイロ運動による円環電流を, S はその円の面積を表す． μ は, また, 断熱不変量であり, 磁場強度がジャイロ周期に比べ十分緩やかに変化する場合, 保存される．前節の磁力線に沿った運動を例に考えてみよう．

磁力線に沿って測った距離を s として座標に選ぶと, 磁力線平行方向の運動方程式は,

$$m\frac{dv_\parallel}{dt} = -\mu\frac{\partial B}{\partial s} \tag{6}$$

と書ける．磁力線を横切る方向のドリフト運動は, 平行方向の運動に比べて十分ゆっくりしていると仮定しよう． $v_\parallel = ds/dt$ に留意し, $\partial B/\partial t = 0$ という定常磁場を考えると, 上式に $v_\parallel$ を乗じて変形すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\parallel^2\right) = -\mu\frac{dB}{dt} \tag{7}$$

となる．一方, 電場ゼロで Lorentz 力しか働かない場合, 荷電粒子の運動エネルギーは保存するので

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\parallel^2 + \mu B\right) = 0 \tag{8}$$

上の二つの式を比べると,

$$\frac{d\mu}{dt} = 0 \tag{9}$$

が満たされなくてはならいことが分かる．

磁気モーメントと運動エネルギーの保存を使うと, 磁力線に沿って磁場強度が変化する, いわゆる磁気ミラー中における, 荷電粒子の運動を調べることができる. 例えば地球の双極子磁場のように, 磁力線に沿って磁場強度が変化する場合を考える. 磁気赤道において磁力線に平行および垂直方向にそれぞれ $v_{0\parallel}, v_{0\perp}$ の速度をもった粒子があるとする. その粒子は, 磁場に沿って磁極の方向に運動すると, ミラー力を受け平行方向の速度は徐々に減速し, やがてある地点で跳ね返される. その時の, 磁力線平行方向の速度は $v_\parallel = 0$ であり, 一方, 磁力線垂直方向の速度 $v_\perp = v'_\perp$ は運動エネルギー保存から, $(v'_\perp)^2 = v_{0\parallel}^2 + v_{0\perp}^2$ となる. 同時に, 磁気モーメント μ が保存されるので,

$$\frac{m(v'_\perp)^2}{2B'} = \frac{mv_{0\perp}^2}{2B_0} \tag{10}$$

ここで, B_0 および B' は磁気赤道および粒子の反射点での磁場強度である. したがって,

$$\frac{B_0}{B'} = \frac{v_{0\perp}^2}{(v'_\perp)^2} = \frac{v_{0\perp}^2}{v_{0\parallel}^2 + v_{0\perp}^2} \equiv \sin^2\theta_p \tag{11}$$

が成り立つ. ここで θ_p をピッチ角とよぶ. θ_p は, 赤道上での速度成分のみから決まる. もし, そこでの θ_p が $\sin^{-1}\sqrt{B_0/B'}$ より大きければ, その粒子は $B = B'$ に到達するより前に反射される. 一方, $\theta_p < \sin^{-1}\sqrt{B_0/B'}$ であれば, その粒子は $B = B'$ よりも磁場の強い領域まで侵入することができる.

磁気ミラーが磁力線にそって両側にあれば, ピッチ角の大きな粒子はその間に捕捉され往復運動をする. この時, 磁力線平行方向速度 $v_\parallel$ と磁力線に沿った座標がつくる作用積分は, 第 2 断熱不変量として知られている.

$$J = \oint v_\parallel ds \tag{12}$$

8.5 反磁性ドリフト

反磁性ドリフトは, 個々の粒子がドリフト運動をするものではないが, その表式の類似性から習慣的にこのように呼ばれる. 流体方程式において, 時間変化が無視できるほど小さく, かつ電場がゼロの状況を考える.

$$0 = e_s n_s \boldsymbol{u}_s \times \boldsymbol{B} - \nabla p_s \tag{13}$$

ここから,

$$\boldsymbol{u}_* \equiv \boldsymbol{u}_{s\perp} = -\frac{\nabla p_s \times \boldsymbol{B}}{e_s n_s B^2} \tag{14}$$

という磁場に垂直方向の平均流が導かれる. 上の式は, 粒子当たり $-\nabla p/n$ となる圧力勾配による力が働いたと考えた場合のドリフト速度の表式と同型で

あるが, 無衝突プラズマでは単一粒子には圧力勾配力が作用するわけではないことに注意しよう. 反磁性ドリフトの原因は, ジャイロ運動にともなう平均流束が, 圧力勾配のために, $-\nabla p \times \boldsymbol{B}$ の正負の方向で打ち消し合わなくなるためである. ここで生ずる流れの向きはイオンと電子で逆であり, 電流を作り出す. この電流が作る磁場は, $\boldsymbol{B}$ と逆向きになることから, $\boldsymbol{u}_*$ を反磁性ドリフトと呼ぶ. この反磁性電流は次章の磁気流体平衡においても再び議論される. また $\boldsymbol{u}_*$ は, 磁化プラズマにおけるドリフト波とも深く関連している.