プラズマ物理学 I　講義メモ (第 10 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.7.09 作成)

7.3　Landu 積分路について

前節での Landau 減衰の導出において現れた, 複素積分での特異点の取り扱いについて簡単にまとめておこう．そのためには, 位相混合の場合と同じく, Vlasov 方程式の初期値問題を考える必要がある．線形化された 1 次元 Vlasov および Poisson 方程式を, 空間 x 方向に Fourier 変換する．波数 k をもつ Fourier 成分を $f_1(v,t)$ とおこう．一方, $f_1(v,t=0)$ が与えられた場合の初期値問題を考えるには, Laplace 変換を適用する．$f_1(v,t)$ および $\phi_1(t)$ の Laplace 変換を $\tilde{f}_1(v,p)$ と $\tilde{\phi}_1(p)$ とする．導関数の Laplace 変換を行う際に初期条件が組み込まれ, Vlasov 方程式から得られた $\tilde{f}_1(v,p)$ を Poisson 方程式に代入すると,

$$\epsilon(k,ip)\tilde{\phi}_1(p) = I(p) \tag{1}$$

が導かれる．ここで $\epsilon(k,ip)$ は前節で求めたプラズマの誘電関数で, $\omega \to ip$ としたものである．$I(p)$ は初期条件に関わる部分で, $f_1(v,t=0)$ を含む積分で与えられる．具体的な導出は読者に残しておこう．ここで $\tilde{\phi}_1$ に逆 Laplace 変換を適用すると,

$$\phi_1(t) = \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{I(p)}{\epsilon(k,ip)} e^{pt} dp \tag{2}$$

として, ϕ_1 の Fourier 振幅の時間発展が与えられる．ただし, 式 (2) の積分は, いわゆる Bromwich 積分路に沿って定義されている．ここで, 元の Laplance 変換での積分が収束するために, 実数 $\beta > 0$ で, かつ, 逆 Laplance 変換における被積分関数のもつすべての極 $p = \gamma$ に対して $\beta > \gamma$ となる必要がある．

　さて, 実際に逆変換を求めるには留数積分を使いたいが, そのためには, $\mathrm{Re}(p) < 0$ の領域に積分路を変更できるように, (2) 式の非積分関数 $I(p)/\epsilon(k,ip)$ を解析接続しなくてはならない．この際, 注意すべきは $\mathrm{Re}(p)$ が正から負に近づくにつれ, $v = ip/k$ にある $\epsilon(k,ip)$ の被積分関数の特異点は, その積分路を横切ろうとする (前節の (16) 式参照)．もしこの特異点が積分路を横断することを許すと, $I(p)/\epsilon(k,ip)$ はその前後で不連続な値をもってしまい, $\mathrm{Re}(p) < 0$ へと解析接続することができない．この問題は, $\epsilon(k,ip)$ の積分路を特異点 $v = ip/k$ の下側にとることで解決される．これが前節で触れた Landau contour である．

　上記のようにして, 定義された $\epsilon(k,ip)$ に対して, $\epsilon(k,ip) = 0$ となる点は, 逆 Laplance 変換, すなわち (2) 式, の極を与える．$t = 0$ の初期条件から十分時間が経過すると, $\phi_1(t)$ の振る舞いにおいては, $\epsilon(k,ip) = 0$ で与えられる特異点の寄与が主体となる．これを normal mode と呼び, 分散関係式 $\epsilon(k,\omega) = 0$ を満たすものとして与えられる．

8　磁場中の粒子運動

プラズマ中に磁場が存在すると, 荷電粒子の運動は大きく影響を受ける. ここでは, 時間的に一定な磁場が存在する場合, ジャイロ周期よりも十分緩やかな時間スケールでの粒子運動を考える. この場合, 粒子運動はジャイロ運動とその中心の運動の重ね合わせとして与えられる. ジャイロ中心が磁場を横切ってゆっくり移動する時, この運動をドリフト運動と呼ぶ.

8.1　電場によるドリフト

はじめに, 空間的に一様で, かつ, 時間的に一定な電場 $\boldsymbol{E}$ が, やはり一様で定常な磁場 $\boldsymbol{B}$ に垂直にかかっている場合を考える. 磁力線垂直方向の荷電粒子の速度を, ジャイロ運動の成分 $\tilde{\boldsymbol{v}}$ とドリフト成分に $\boldsymbol{v}_d$ に分けると,

$$m_s\dot{\tilde{\boldsymbol{v}}} = e_s\boldsymbol{E} + e_s(\tilde{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}_d) \times \boldsymbol{B} \tag{3}$$

この時間平均をとると, 速い周期で運動する $\tilde{\boldsymbol{v}}$ を含む項は消えて,

$$\boldsymbol{v}_{E\times B} \equiv \boldsymbol{v}_d = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \tag{4}$$

を得る. ここで, $\boldsymbol{v}_{E\times B}$ は $E\times B$ ドリフト速度, または単に, 電場ドリフト速度, と呼ばれる.

この導出は, 電場による力 $e_s\boldsymbol{E}$ を他の力 $\boldsymbol{F}$ に置き換えても同様である. その場合のドリフト速度は,

$$\boldsymbol{v}_F = \frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{e_sB^2} \tag{5}$$

となる. $\boldsymbol{v}_{E\times B}$ は質量にも電荷にもよらないため, 電子もイオンも同じように電場ドリフトしこれによる電流は流れないが, $\boldsymbol{v}_F$ は電荷 e_s を含むので, 一般の場合には荷電粒子のドリフト運動による電流が流れる.

$\boldsymbol{F}$ の例としては, 重力などが考えられるが, 実験室環境ではその寄与は小さい. 一方, 電場が時間変化する場合, 荷電粒子の質量が大きいとその変化に追随するのに有限の時間を必要とする. すなわち慣性力, $-m_s\boldsymbol{a} = -m_s d\boldsymbol{v}_{E\times B}/dt$ が働く. この見かけの力を $\boldsymbol{F}$ として考えると, 分極ドリフト

$$\boldsymbol{v}_p = \frac{1}{\Omega_s B}\frac{d\boldsymbol{E}_\perp}{dt} \tag{6}$$

が生じる. この導出は, $\boldsymbol{v}_\perp = \tilde{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{v}_{E\times B} + \boldsymbol{v}_p$ として運動方程式に代入し, 0 次のジャイロ運動, 1 次の $E\times B$ ドリフト, 2 次の分極ドリフトとしてオーダー毎に方程式を立てることでも導かれる. 具体的な導出は読者の課題にゆずる. 分極ドリフトは, Ω_s に逆比例するので, 質量の大きなイオンが主に寄与し, これに伴った電流が生じる. これは分極電流と呼ばれ, 次章で扱う磁気流体波において重要な役割を演ずる.

8.2 非一様磁場によるドリフト

磁場に不均一性があると, それだけでもドリフト運動が生じる. 宇宙や核融合プラズマに働く磁場は非一様であり, これに起因したドリフトが重要となる場合が多くある. 磁場の非均一性には, 磁場強度の空間変化と磁場の方向が変わる場合とが考えられる. もちろん両者は同時に存在するのだが, 以下では理論的扱いを簡単にするために別々に分けて考える.

磁場の方向が変わる場合, 磁場方向の単位ベクトルを $\hat{b}$ とすると, 曲率ベクトル $\boldsymbol{\kappa} = \hat{b} \cdot \nabla \hat{b}$ がその指標を与える. これは曲率半径を表すベクトル $\boldsymbol{R}_c$ とは, $\boldsymbol{\kappa} = -\boldsymbol{R}_c / R_c^2$ の関係にある. ここで方向が変わる磁場に沿った運動, すなわち曲率ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ で曲がった磁力線に沿った粒子運動を考える. この粒子には, 見かけの力として遠心力 $m v_\parallel^2 \boldsymbol{R}_c / R_c^2$ が働く. これを $\boldsymbol{F}$ として考えると, 曲率ドリフト

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{v_\parallel^2}{\Omega_s} (\hat{b} \times \boldsymbol{\kappa}) \tag{7}$$

が導かれる. 曲率ドリフト $\boldsymbol{v}_c$ の方向は電荷の符号に依存し, 電子とイオンで異なるので, 磁力線を横切る電流を生じる.