プラズマ物理学 I　講義メモ (第 9 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.6.30 作成)

6.3　二流体不安定性

先の節では, プラズマや中性流体に共通の Rayleigh-Taylor 不安定性について議論した. ここではプラズマに特有の二流体不安定性について調べてみる. 1 価のイオンと電子からなるプラズマを考えよう. 簡単のため, 磁場はなし, 温度ゼロ, という条件のもとで 1 次元の静電揺動を仮定する. 連続の式と運動方程式から, プラズマ振動の節でやったように,

$$\frac{\partial n_{s1}}{\partial t} + n_0 \frac{\partial u_{s1}}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$n_0 m_s \frac{\partial u_{s1}}{\partial t} = -e_s \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \tag{2}$$

n_{s1}, u_{s1}, ϕ_1 は, それぞれ, s 種粒子の密度と平均流速の揺動成分, および静電ポテンシャル揺動を表す. ここで波数 k, 角振動数 ω を使って, 正弦波的な揺動を仮定し, 上式を Possion 方程式に代入してまとめた結果得られる分散関係式は,

$$\epsilon(k,\omega) \equiv 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} = 0 \tag{3}$$

となる. ここで, $\omega_{ps}^2 = n_0 e_s^2/\epsilon_0 m_s$ は, s 種粒子の質量と電荷で書き換えたプラズマ角振動数である.

さてここで, 成分ごとに 0 次の平均速度 u_{s0} で運動している状況を考えよう. u_{s0} の値は各成分ごとに異なって良い. すると連続の式と運動方程式は

$$\frac{\partial n_{s1}}{\partial t} + u_{s0}\frac{\partial n_{s1}}{\partial x} + n_0 \frac{\partial u_{s1}}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$n_0 m_s \left(\frac{\partial u_{s1}}{\partial t} + u_{s0}\frac{\partial u_{s1}}{\partial x} \right) = -e_s \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \tag{5}$$

両式の左辺に追加された項は, 平均流速 u_{s0} に乗った系において, 周波数の Doppler shift $\omega'_s = \omega - k u_{s0}$ をもたらす. よって, 分散関係式は

$$\epsilon(k,\omega) = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{(\omega'_s)^2} = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{(\omega - k u_{s0})^2} = 0 \tag{6}$$

に帰着することが導かれる.

改めて, イオンは静止し, 電子が相対速度 u_0 で運動している場合を考えよう. 上の結果から, 分散関係式は

$$1 = \frac{m_e/m_i}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - u)^2} \ . \tag{7}$$

ここで $\xi = \omega/\omega_{pe}$, $u = ku_0/\omega_{pe}$ という無次元変数を導入した．式 (7) の右辺を

$$\eta(\xi) = \frac{m_e/m_i}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - u)^2} \tag{8}$$

とおくと, 分散関係式をみたす ω (またはた ξ) は, $y = \eta(\xi)$ と $y = 1$ の交点で与えられることが分かる．ここで (7) 式は, 実係数を持つ ξ についての 4 次方程式であるので, パラメータ u の値に応じて, 交点が 4 つある場合は 4 実根, 二つの場合は 2 実根と 2 複素共役根をもつことが分かる．一方, $y = \eta(\xi)$ は, 任意の ξ に対して $y > 0$ であり, かつ $\xi = 0$ と $\xi = u$ に特異点を持つ．さらに, $|\xi| \to \infty$ で $y \to 0$ である．したがって, $\xi < 0$ と $u < \xi$ にはそれぞれ交点が一つずつあるが, u の値によっては, $0 < \xi < u$ の間で $y = \eta(\xi)$ と $y = 1$ が交点を持たない場合がある．その時 $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ の不安定解が存在することが結論される．その具体的な値は, $ku_0 = \omega_{pe}$, かつ $|\omega| \ll \omega_{pe}$ の場合について, 近似的に求めることは容易である．結果だけをまとめておくと, この場合の不安定解は

$$\frac{\omega}{\omega_{pe}} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \tag{9}$$

となる．導出は各自の課題に残しておこう．このような不安定性が発達すると, 電場擾乱が波として成長し, 電子の運動を乱すであろう．すると, 電子とイオンの相対速度は減少しはじめ, 不安定性の成長も止まる．上記と同様な解析は, 近似的にイオンが均一な分布をもって静止し, かつ, 電子同士が相対運動をもつ場合 (例えば電子ビームが入射されるなど) にも適用できる．この時, ビーム成分も含めて全体が電気的に中性であるとすればよい．

7　無衝突プラズマの運動論

7.1　位相混合

プラズマの衝突周波数が十分小さく, ほぼ無衝突と考えられる時, 位相空間上の分布関数構造がプラズマ中の揺らぎの性質に大きく影響する．その最も簡潔かつ端的な例は, 電磁場揺動のない場合においても現れ, 「弾丸的な」(ballistic) な粒子運動がもたらす位相混合の結果生じる無衝突散逸に見ることができる．1 次元の系で電磁場のない Vlasov 方程式は,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{10}$$

で, $f(x, v, t)$ の一般解は, 初期条件 $f(x, v, t = 0)$ を使って

$$f(x, v, t) = f(x - vt, v, 0) \tag{11}$$

となる．x 方向に周期的で $\propto \exp(ikx)$ の依存性を仮定すると (Fourier 変換すると), 初期条件を $F(v)\exp(ikx)$ として,

$$f(x,v,t) = F(v)\exp[ik(x-vt)] \tag{12}$$

この時, 数密度 $n(x,t)$ は

$$n(x,t) = e^{ikx}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)e^{-ikvt}dv \tag{13}$$

となる．この時, ballistic な粒子運動にともなって分布関数は位相空間上で引き延ばされるとともに, 速い粒子が遅い粒子を次々と追い越して, 波の位相について周回遅れの粒子がでてくる．さらに時間が経つと, 周回遅れの度合いは進み, 固定した x 座標上でみると, v 方向に振動成分 $\propto \exp(iktv)$ が顕著に現れることが分かる．その結果, v 方向の積分値は減少し, 密度擾乱の振幅は減衰する．すなわち, 無衝突減衰がおきる．ここで, (13) 式にある積分は, $F(v)$ の Fourier 変換とみなすこともできる．初期条件の速度分布 $F(v)$ が十分滑らかならば, v 空間の高波数成分の寄与は小さい．一方, 時間の経過とともに kt は大きくなるので, 対応する Fourier モードの振幅, すなわち密度揺動振幅は時間の経過とともに小さくなり, 無衝突減衰に対応した結論が得られる．

7.2 Landau 減衰

次に, 磁場のない場合の静電的なプラズマ波動を考えよう．イオンは一様に分布し, かつ静止しているとする．すなわち, 電子音波 (Langmuir 波) で扱った問題を, 運動論によって解析する．解くべき方程式は, 線形化された Vlasov 方程式と Poisson 方程式である．

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{e}{m}\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0 \tag{14}$$

$$-\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = -\frac{e}{\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} f_1 dv \tag{15}$$

ここで添字 0 は平衡成分を, 1 は揺動成分を表す．時間, 座標ともに Fourier 変換して両式をまとめると, 分散関係式を得る．すなわち,

$$\epsilon(k,\omega) \equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_0'}{v-(\omega/k)}dv = 0 \tag{16}$$

となる．ここで $F_0' \equiv \partial F_0/\partial v = (\equiv \partial f_0/\partial v)/n_0$ とおいた．一般に ω は複素数であり, 式 (16) は $v = \omega/k$ に特異点をもつ．このため (16) 式の積分は注意が必要である．Landau は, 式 (14)-(15) の初期値問題を, Laplace 変換を用いて

解いた．その逆 Laplace 変換において被積分関数を解析接続する際に，式 (16) と同様の積分が現れ，その経路は，$\mathrm{Im}(\omega) \leq 0$ であっても，特異点の下側を回るようにとる必要があることを指摘した．その理由の詳細は次の節で述べるとして，$\omega = \omega_r + i\omega_i$ として実部と虚部に分けた時，$|\omega_i| \ll |\omega_r|$ である場合の分散関係を調べてみよう．

$|\omega_i| \ll |\omega_r|$ の場合には，極は v の実軸上にあると見なせる． このとき，$\epsilon(k,\omega) = \epsilon_r + i\epsilon_i = 0$ を，$\omega = \omega_r$ のまわりで展開すると，

$$\epsilon_r(k,\omega_r) + i\epsilon_i(k,\omega_r) + i\omega_i \left.\frac{\partial \epsilon_r}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_r} = 0 \tag{17}$$

ここで波の伝播は，$\epsilon_r(k,\omega_r) = 0$ で近似的に与えられるので，

$$\omega_i = -\frac{\epsilon_i(k,\omega_r)}{\left.\frac{\partial \epsilon_r}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_r}} \tag{18}$$

ω_i の見積もりにおいては，流体近似で波の伝播が与えられるとして十分であり，$\epsilon_r = 1 - \omega_{pe}^2/\omega_r^2$，と近似できる．また，主値積分を使って

$$\epsilon(k,\omega_r) \equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k^2}\left[P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_0'}{v-(\omega_r/k)}dv + i\pi \left.F_0'\right|_{v=\omega_r/k}\right] = 0 \tag{19}$$

から，$\epsilon_i(k,\omega_r) = -\,\pi(\omega_{pe}^2/k^2)\left.F_0'\right|_{v=\omega_r/k}$，となり，

$$\frac{\omega_i}{\omega_{pe}} = \left.\frac{\pi\omega_{pe}^2}{2k^2}F_0'\right|_{v=\omega_r/k} \tag{20}$$

を得る．Maxwell 分布などのように $F_0' < 0$ の場合には，$\omega_i < 0$ となる解が長時間の振る舞いにおいて支配的となる．この時，プラズマ波は時間に対して指数関数的に減衰する．これを Landau 減衰と呼ぶ．