プラズマ物理学 I　講義メモ (第 8 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.6.21 作成)

6　プラズマの不安定性

6.1　不安定性の基礎概念

これまでのプラズマ波動の議論では, 線形近似のもと, 一定の波数 $\boldsymbol{k}$ と角振動数 ω をもち, 一定の振幅で変動する密度, 速度場, 圧力, 電磁場の揺らぎを取り扱った. 一方, プラズマが過剰なエネルギーをもつ場合, それを使って揺らぎが時間的に成長することがある. これを不安定性という.

　不安定性とは, プラズマに限らず多くの物理系に見られる現象で, 平衡状態やその近傍での振動・波動とともに, その系の振る舞いを特徴づける上で重要な考え方である. その最も基礎的な例は, 力学で学ぶ単振り子に見られる. 単振り子の安定状態からの振れ角 θ についての運動方程式は,

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin\theta \tag{1}$$

と表される. $\theta \ll 1$ の場合には, 線形近似が成り立ち, 単振動の式 $\ddot{\theta} = -\omega_0^2\theta$ を得る. この解は, 力学で学んだように,

$$\theta = \theta_0 \exp(\pm i\omega_0 t) \tag{2}$$

$$\dot{\theta} = \pm i\omega_0\theta_0 \exp(\pm i\omega_0 t) \tag{3}$$

と表される. 各時刻における解を $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$ の位相空間上にプロットすると, その軌道は原点を中心とした円を描く.

　一方, $\theta = \pi$ の場合, 振り子は倒立状態にある. この状態は平衡状態であるが不安定で, 何か微小な擾乱が加わると振り子は下に向けて振れ始める. $\theta' = \theta - \pi$ とおくと,

$$\ddot{\theta}' = \omega_0^2 \sin\theta' \tag{4}$$

となり, 線形近似から $\ddot{\theta}' = \omega_0^2\theta'$ を得る. この解は,

$$\theta' = \theta'_0 \exp(\pm\omega_0 t) \tag{5}$$

$$\dot{\theta}' = \pm\omega_0\theta'_0 \exp(\pm\omega_0 t) \tag{6}$$

となり, 時間的に振動する解ではなく, 指数関数となる. この時の解の軌道は, $\dot{\theta}'/\omega_0 = \theta'$ または $\dot{\theta}'/\omega_0 = -\theta'$ で表される直線となり, 前者は原点から指数関数的に離れ, 後者は原点に指数関数的に近づく解をもつ. この 2 直線の交点は, いわゆる separatrix (X 点) となる.

　これから分かるように, $\dot{\theta}'/\omega_0 = \theta'$ の軌道は, 倒立点 $\theta' = 0$ から振り子が倒れる不安定性を表している. この時, 初期の揺らぎの振幅 θ'_0 が非常に小さ

くとも, その揺らぎは時間に対して指数関数的に増大する. すなわち, $\theta' = 0$ で振り子は不安定状態にある. 一方, 通常の振り子では, 初期揺らぎの振幅は一定に保たれ, $\theta = 0$ は中立安定状態である.

6.2 Rayleigh-Taylor 不安定性

流体における不安定性の例として, 重力のもとで密度の異なる流体が重なった状態で起きる Rayleigh-Taylor 不安定性を考えよう. Rayleigh-Taylor 不安定性は流体力学が関わる様々な問題にあらわれるとともに, プラズマにおいても重要な不安定性の一つであり, それに関連した種類の多くの不安定性が宇宙や核融合のプラズマにもよく現れる.

ここでは一様な重力場の中で密度 ρ_h の重い流体が, $z = 0$ で密度 ρ_l の軽い流体の上に乗っている状況を考えよう. 流体はどちらも非圧縮で, ρ_h と ρ_l はそれぞれ一定とし, 簡単のため $\rho_h \gg \rho_l \approx 0$ とする. すなわち, 背景密度 ρ_0 は, $z > 0$ で $\rho_0 = \rho_h$, $z < 0$ で $\rho_0 = \rho_l \approx 0$ となっている. この時, $z = 0$ の境界面近くで発生した x 方向に波数 k をもつ擾乱がどのように成長するかを考える. ここで擾乱成分も含めて, y 方向には対称性を仮定する. また, $z = h$ には容器のふたがあり, そこで擾乱成分はゼロとなる境界条件が課されている. 一方, x 方向の系のサイズは擾乱の波長に比べて十分に長く, x 方向には周期境界条件が適用できるものとする.

非粘性の流体方程式を線形化して考えよう. 流体の非圧縮性条件 $(d\rho/dt = 0)$ と連続の式から, $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0$ となり, y 方向の対称性を使って以下の二つの式が導かれる.

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + u_{z1}\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z} = 0 \ . \tag{8}$$

運動方程式の x, z 成分は,

$$\rho_0 \frac{\partial u_{x1}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} \tag{9}$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_{z1}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} - \rho_1 g \ . \tag{10}$$

ここで平衡状態のつり合い, $-\partial p_0/\partial z - \rho_0 g = 0$, を仮定した.

擾乱成分について, $\propto \exp(ikx - i\omega t)$ を仮定する一方, z 方向は固有値問題となるので, z 依存性は残したまま上の 4 つの式を変形する. 例によって, $\partial/\partial t \to -i\omega$, $\partial/\partial x \to ik$ という対応をとると便利である. 上の 4 つの式をまとめて, u_{z1} についての式を得る.

$$\omega^2 \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_0 \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\right) = \left(\omega^2 \rho_0 + g\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) k^2 u_{z1} \tag{11}$$

式 (11) の境界条件を考えよう．上にある重い流体の内部では密度は一様なので式 (11) は,

$$\frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial z^2} = k^2 u_{z1} \tag{12}$$

上端 $z = h$ で $u_{z1} = 0$ という境界条件を満たすには, $u_{z1} = A\sinh[k(z-h)]$ という固有関数となる (ここで A は定数). 一方, $z = 0$ を挟む微小区間 $[-0, +0]$ で式 (11) を積分すると, 密度の不連続についての z 微分の項が残って,

$$\left[\omega^2 \rho_0 \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\right]_{-0}^{+0} = \left[g\rho_0 k^2 u_{1z}\right]_{-0}^{+0} \tag{13}$$

ここで, $\rho_0(z=+0) = \rho_h$, $\rho_0(z=-0) = 0$, を使い, 先に求めた固有関数とその z 微分に $z = +0$ を代入すると, 固有値 ω が求まる.

$$\omega^2 = -kg\tanh(kh) \tag{14}$$

これから分かるように, ω は純虚数となり, $\omega = i\sqrt{kg\tanh(kh)}$ は時間に対して指数関数的に成長する不安定解を与える.