プラズマ物理学 I　講義メモ (第 7 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.6.15 作成; 2014.6.18 改訂)

5.3　電子音波 (Langmuir 波)

前節で議論したプラズマ振動は, 波としての性質をもつというよりも, 角振動数 ω_p で局所的に振動する単振動としての振る舞いを示していた. その導出において熱運動が無視できる ($T_e = 0$) と仮定したが, 熱運動を考慮すると音波としての性質が現れる. ではここで他の仮定は同じとして, 運動方程式に圧力勾配の 1 次の項 $-\nabla p_1$ を加えることにしよう. 線形化された運動方程式は,

$$n_0 m_e \frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t} = -en_0 \boldsymbol{E}_1 - \nabla p_1 \tag{1}$$

電子は断熱圧縮されるとすると, $p \propto n^\gamma$ から

$$p_1 = \gamma T_{e0} n_1 \tag{2}$$

が得られる. ここで T_{e0} は 0 次の電子温度を表す. 前節と同様に線形化された連続の式をさらに時間微分し, 現れてくる $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{E}_1$, p_1 を残りの式を使って順次消去すると,

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = -\omega_p^2 n_1 + \gamma \frac{T_{e0}}{m_e} \nabla^2 n_1 \tag{3}$$

を得る. ここで, $n_1 = \tilde{n}_1 \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$ という波を仮定すると,

$$-\omega^2 \tilde{n}_1 = -\omega_p^2 \tilde{n}_1 - \gamma \frac{T_{e0}}{m_e} k^2 \tilde{n}_1 \tag{4}$$

となる. ここで, $\partial/\partial t \to -i\omega$, $\nabla \to i\boldsymbol{k}$ という対応を覚えておくと簡便である. より正式には, 式 (3) の両辺に Fourier 変換

$$\tilde{n}(\boldsymbol{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} n(\boldsymbol{x}, t) \exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + i\omega t) d^3x dt \tag{5}$$

を施して, 導関数の Fourier 変換を使うと式 (4) を得る. 任意の複素振幅 $\tilde{n}_1$ に対して式 (4) が成り立つには, 分散関係式

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \gamma \frac{T_{e0}}{m_e} k^2 \tag{6}$$

が満たされなければならない.

以上の結果は, 波の角振動数は波数 k に依存し, $k \to 0$ で $\omega \to \omega_p$ となり, この時, 群速度 $(\partial\omega/\partial k)$ はゼロとなって, 波束は伝播できなくなる. 一方,

$k \to \infty$ で位相速度 $\omega/k \to \gamma T_{e0}/m_e$ となり, 高波数極限で波の位相速度は電子熱速度に比例することが分かる．ここで導かれたプラズマ波動は, 電子密度の圧縮と電場による効果が入った電子音波であり, Langmuir 波とも呼ばれる．流体近似の下では, Langmuir 波は高波数領域まで存在するが, その波数が Debye 長の逆数程度になると運動論的効果が無視できず, 波は強い減衰を受けることが知られている．これは Landau 減衰と呼ばれ, 後の節でより詳しく議論される．

5.4　イオン音波

プラズマ振動よりもずっとゆっくりした低周波数の揺動においては, イオンの運動を考慮する必要がある．特に Debye 長よりも十分波長が長く, 時間的にゆっくり変化する電場を考える場合, 揺動成分も含めた電子とイオンの密度を等しいとする準中性条件が良い近似となる．

$$n_i = n_e \quad (\text{where} \quad n_0 = n_{i0} = n_{e0} \quad \text{and} \quad n_1 = n_{i1} = n_{e1}) \tag{7}$$

さらに, ゆっくりした変動に対しては電子の慣性項の寄与を無視でき, 圧力勾配と電場による力がつり合った状態が実現されるだろう

$$0 = -\nabla p_e - e n_0 \boldsymbol{E}_1 \ . \tag{8}$$

ここで縦波すなわち静電場を考えると, $\boldsymbol{E}_1 = -\nabla \phi_1$, であり, また電子温度は等温とすると, $\nabla p_{e1} = T_{e0} \nabla n_1$, となるので

$$\frac{n_1}{n_0} = \frac{e\phi_1}{T_{e0}} \tag{9}$$

を得る．(ここでは変動量のみを考えており, その空間平均は 0 なので, ∇ を積分するときの積分定数は 0 となる.)

　イオンの連続の式と運動方程式を線形化すると, 先述のプラズマ振動での電子の場合と同様に,

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}_{i1} = 0 \tag{10}$$

$$n_0 m_i \frac{\partial \boldsymbol{u}_{i1}}{\partial t} = -e n_0 \nabla \phi_1 - \gamma T_{i0} \nabla n_1 \ . \tag{11}$$

以上の式をまとめると,

$$\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} = \frac{e n_0}{m_i} \nabla^2 \phi_1 + \frac{\gamma T_{i0}}{m_i} \nabla^2 n_1 = \frac{T_{e0} + \gamma T_{i0}}{m_i} \nabla^2 n_1 \tag{12}$$

ここで, $n_1 = \tilde{n}_1 \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - i\omega t)$ という波を仮定すると, 5.3 節でやったようにして, 分散関係式

$$\omega^2 = C_s^2 k^2 \tag{13}$$

が導かれる．ここで,

$$C_s = \sqrt{\frac{T_{e0} + \gamma T_{i0}}{m_i}} \tag{14}$$

は波の位相速度を表す．これは中性気体における音速が $c_s = \sqrt{\gamma T_0/m}$ となることと対応しており, ここで導いた波はイオン音波と呼ばれる.

5.5 プラズマ中の電磁波

これまでは, 磁場揺動のない静電的な波動を考えてきたが, ここではプラズマ中を伝播する電磁波がプラズマからどのような影響を受けるかみてみよう．簡単のため, 背景磁場と電子温度はゼロとし, 電子の運動のみを考える．運動方程式は

$$n_e m_e \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t} + \boldsymbol{u}_e \cdot \nabla \boldsymbol{u}_e\right) = -en_e\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_e \times \boldsymbol{B}\right) \tag{15}$$

微小振幅を仮定して線形化すると, 左辺第 2 項の移流項と右辺第 2 項の Lorentz 力の項は無視できて,

$$n_0 m_e \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = -en_0 \boldsymbol{E}_1 \tag{16}$$

となる．さらに横波を仮定すると, $\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0$ であり, n_0 は一定とすると連続の式から密度変化は生じない ($\partial n_1/\partial t = 0$) ことが分かる．あとは Maxwell 方程式を組み合わせれば良い．これはもともと線形方程式なので,

$$\nabla \times \boldsymbol{B}_1 = \mu_0 \boldsymbol{j}_1 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}_1}{\partial t} \tag{17}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_1 = -\frac{\partial \boldsymbol{B}_1}{\partial t} \tag{18}$$

方程式を閉じるには, $\boldsymbol{j}_1 = -en_0\boldsymbol{u}_1$ としてこれを運動方程式に代入し,

$$\frac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial t} = \frac{e^2 n_0}{m_e}\boldsymbol{E}_1 \tag{19}$$

とすればよい．この式の $\nabla\times$ をとると, 式 (18) を使って

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \boldsymbol{j}_1 + \epsilon_0 \omega_p^2 \boldsymbol{B}_1\right) = 0 \tag{20}$$

を得る ($\omega_p^2 = e^2 n_0/\epsilon_0 m_e$)．ここで変動量の時間平均はゼロなので, 上式を積分すると $\nabla \times \boldsymbol{j}_1 + \epsilon_0\omega_p^2\boldsymbol{B}_1 = \text{const.} = 0$ が導かれる.

一方, 式 (17) の $\nabla\times$ をとり, ベクトル公式 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$ と $\nabla\cdot\boldsymbol{B}_1=0$ を使い, さらに上の結果を利用して $\nabla\times\boldsymbol{j}_1$ を消去すると,

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{B}_1}{\partial t^2}=c^2\nabla^2\boldsymbol{B}_1-\omega_p^2\boldsymbol{B}_1 \tag{21}$$

が得られる. ここで例によって, $\partial/\partial t\to -i\omega$, $\nabla\to i\boldsymbol{k}$ とすると, プラズマ中を伝播する電磁波の分散関係式は

$$\omega^2=c^2k^2+\omega_p^2 \tag{22}$$

となることが分かる. 右辺第 2 項 (ω_p^2) は, 電磁波の電場によって生じた電子運動がつくる電流により電磁波の伝播特性が受ける影響を表している. プラズマ密度が低くなれば, $\omega_p\to 0$ であり, このとき真空中の電磁波に近づく. 一方, ω に比べて ω_p が無視できなくなると, 電磁波の位相速度は速くなるが, 群速度 $(v_g=\partial\omega/\partial k)$ は遅くなることが分かる. $\omega\to\omega_p$ となると, 波長は長く延び $(k\to 0)$, 電磁波は伝播できなくなる. すなわち $\omega<\omega_p$ のようなプラズマ密度の濃い領域には, 電磁波は侵入できずに反射される. こうした電磁波の伝播特性を利用して, 未知のプラズマ密度を推定することができる. また, 地球の裏側でも短波放送を受信できるのは, 電離層プラズマによる反射を利用している.