プラズマ物理学 I　講義メモ (第 6 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.6.6 作成)

4.4　流体方程式の導出 (つづき)

次に 2 次モーメントで与えられるエネルギーの式について考えよう．Vlasov (または Boltzmann) 方程式

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla f_s + \frac{q_s}{m_s}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}} = \sum_{s'} C_{s,s'}(f_s, f_{s'}) \ . \tag{1}$$

に $mv^2/2$ を乗じて速度空間積分を計算する．すると, 式 (1) の第 1 項は単位体積当たりの運動エネルギーの時間変化を与える．

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}m_s v^2 f_s d^3v \tag{2}$$

ただし, やはりここでも $\boldsymbol{v}$ を平均流 ($\boldsymbol{u}_s$) 部分とそこからの差 ($\boldsymbol{v}'$) に分けて, $v^2 = (\boldsymbol{u}_s+\boldsymbol{v}')\cdot(\boldsymbol{u}_s+\boldsymbol{v}')$ とするのが便利である．$\boldsymbol{v}'$ についての 1 次の項は積分してゼロとなり, また分布関数は $\boldsymbol{v}'$ について等方的とした場合、前回導いた圧力 p_s を使って第 1 項は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}m_s n_s u_s^2 + \frac{3}{2}p_s\right) \tag{3}$$

となる．

第 2 項の計算は少し煩雑である．$\boldsymbol{v}$ と ∇ を交換して,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}m_s v^2 \boldsymbol{v}\cdot\nabla f_s d^3v = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}m_s \nabla\cdot\left(v^2\boldsymbol{v}f_s\right)d^3v \tag{4}$$

としてから, $\boldsymbol{v}$ をやはり平均流とそこからの差に分けて積分する．上と同様に, $\boldsymbol{v}'$ について等方的とすると, $\int m_s(\boldsymbol{u}_s\cdot\boldsymbol{v}')\boldsymbol{v}' f_s d^3v = p_s\boldsymbol{u}_s$, $(1/2)\int m_s(v')^2\boldsymbol{u}_s f_s d^3v = (3/2)p_s\boldsymbol{u}_s$, とできる．ここでも, $\boldsymbol{v}'$ についての 1 次の項は積分してゼロとなることを使い, これらをまとめると

$$\nabla\cdot\left(\frac{1}{2}m_s n_s u_s^2\boldsymbol{u}_s + \frac{5}{2}p_s\boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{Q}_s\right) \tag{5}$$

が得られる．ここで $\boldsymbol{Q}_s$ は、熱流束であり $\boldsymbol{v}'$ の 3 次モーメントで与えられる．

$$\boldsymbol{Q}_s \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}m_s(v')^2\boldsymbol{v}' f_s d^3v' \tag{6}$$

左辺第 3 項は, まず $\boldsymbol{v}$ で部分積分する. $v \to \infty$ では, 表面積分の項はゼロとなり, また $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})=0$ なので, $-e_s n_s \boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{E}$ という電場による仕事の項が残る. 最後に衝突項を介して異なる粒子種間でのエネルギーの受け渡しを

$$\sum_{s'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m_s (v')^2 C_{s,s'}(f_s, f_{s'}) d^3 v' \equiv -\sum_{s' \neq s} \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_{s,s'} \equiv -\frac{\partial W_s}{\partial t} \tag{7}$$

として表す. ここで衝突項に要請した性質から, 同種粒子間での正味のエネルギーのやりとりはゼロとなる. 以上をまとめると,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} m_s n_s u_s^2 + \frac{3}{2} p_s\right) + \nabla\cdot\left(\frac{1}{2} m_s n_s u_s^2 \boldsymbol{u}_s + \frac{5}{2} p_s \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{Q}_s\right) = e_s n_s \boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{E} - \frac{\partial W_s}{\partial t} \tag{8}$$

さきに導出した連続の式と運動方程式を使って変形すると

$$\left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \boldsymbol{u}_s \cdot \nabla p_s\right) + \frac{5}{2} p_s \nabla \cdot \boldsymbol{u}_s + \nabla \cdot \boldsymbol{Q}_s = \boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{R}_s - \frac{\partial W_s}{\partial t} \ . \tag{9}$$

を得る. 流体力学で学ぶように, 左辺第 1 項は流体素片に乗ってみたときの時間変化, すなわち, Lagrange 微分をあらわす

$$\frac{dp_s}{dt} = \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \boldsymbol{u}_s \cdot \nabla p_s\right) \ . \tag{10}$$

式 (9) の左辺第 2 項は圧縮 ($\nabla \cdot \boldsymbol{u}_s < 0$) または膨張 ($\nabla \cdot \boldsymbol{u}_s > 0$) による圧力の増減を, 第 3 項は熱流束による寄与をそれぞれ示す. 右辺は他種粒子との間の抵抗力および衝突によるエネルギー変化を示す.

4.5 流体方程式の完結問題

これまで流体方程式の導出で見たように, Vlasov 方程式のような運動論的方程式のある次数のモーメントを計算すると, それより 1 次 (または一般にはそれ以上) 高い次数のモーメント量が流体方程式に現れる. 密度 (n_s) の連続の式には粒子フラックス ($n_s\boldsymbol{u}_s$) が現れ, 運動量 ($m_s n_s \boldsymbol{u}_s$) の式 (運動方程式) には圧力 (p_s), 圧力の式には熱流束 ($\boldsymbol{Q}_s$), といった具合でなる. 問題は, エネルギー方程式まででは, 熱流束の時間変化を記述するすべがないことである. すなわち, 未知数の方が多く, 方程式が閉じない. このことは, モーメントの次数を次々にあげていっても解決できないことは容易に想像できる. これを「完結問題」と呼ぶ.

そこで, 運動論的方程式から導いた流体方程式のセットを閉じるには, 何らかの仮定もしくはモデルを用いる必要がある. 例えば, $f_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ の $\boldsymbol{v}'$ 依存性を Maxwell 分布として仮定すれば, $\boldsymbol{Q}_s = 0$ となって方程式が閉じる. よく

使われるモデルには以下の 2 つがある．一つは, プラズマ中の粒子運動により, $\boldsymbol{Q}_s$ が圧力の式の他の項に比べて大きくなり, 温度分布がすぐに均一化されると仮定する「等温モデル」である．すなわち, T_s を一定として, 連続の式から与えられる密度 n_s を使って, $p_s = n_s T_s$ とし, 圧力の式を解かずにすませる方法である．

もう一つは, いわゆる「断熱近似」で, $\nabla \cdot \boldsymbol{Q}_s = 0$ とする．さらに衝突による寄与を無視すると, 圧力方程式は

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{5}{2} p_s \nabla \cdot \boldsymbol{u}_s = 0 \tag{11}$$

と簡単化される．ここで, 密度の連続の式

$$\frac{dn_s}{dt} + n_s \nabla \cdot \boldsymbol{u}_s = 0 \tag{12}$$

とあわせて, $\nabla \cdot \boldsymbol{u}_s$ を消去すると,

$$\frac{p_s}{n_s^{5/3}} = \mathrm{const.} \tag{13}$$

に帰着する．ここで, $\gamma = 5/3$, $n_s \propto V^{-1}$ とすれば, 熱力学でなじみ深い表式 $pV^\gamma = \mathrm{const.}$ が得られる．

このことから, 流体方程式の完結問題は, プラズマがどのような状態方程式を満足するか, に関連していることが分かる．一方で, 分布関数の立場から考えると, 分布関数の速度空間上の構造をどのように粗視化して流体量を導くか, という問題となり, 基礎的でありながら今なお興味深い研究テーマである．

5　磁場のないプラズマの波動

先に導出した運動論的方程式または流体方程式から, 電荷密度 $\rho = \sum_s e_s n_s$, および電流密度 $\boldsymbol{j} = \sum_s e_s n_s \boldsymbol{u}_s$ を求め, これらを Maxwell 方程式

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \tag{14}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{15}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{16}$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{17}$$

に代入することで, 電磁場も含めて閉じた方程式系が構成される．

5.1 微小振幅の波動

運動方程式の移流項 (対流項とも呼ばれる) $\boldsymbol{u}_s \cdot \nabla \boldsymbol{u}_s$ に典型的に見られるように, 流体方程式は非線形項を含む. この項は, 解析的な取り扱いを一般に困難なものとする. この問題を避けるため, ここでは, 揺動成分の振幅が背景 (または平均) 成分の値に比べて無視できるほど小さい微小振幅波動が, プラズマ中を伝播する様子を調べることにする.

例えば, 密度 n が平均量と変動量の重ね合わせとして

$$n = n_0 + n_1 + n_2 + ... \tag{18}$$

と表されるとする. ここで, n_0 は $O(1)$, n_1 は $O(\varepsilon)$, n_2 は $O(\varepsilon^2)$, の量とする. ε は微小量を表すパラメータである. 運動論的方程式や流体方程式, および Maxwell 方程式で記述される量を, すべてこのように展開し, $O(\varepsilon)$ までを残すという近似を行う. これを線形近似と呼ぶ. 線形近似を施すと, 方程式の各項は全て, 一つの変動量のみを含む線形項となる.

各変数を Fourier 変換で表すことができるとき, 方程式が線形化されていると特に便利である. 例えば,

$$n_1(\boldsymbol{x}, t) = \int \tilde{n}(\boldsymbol{k}, \omega) \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - i\omega t) d\boldsymbol{k} d\omega \tag{19}$$

であれば, 線形方程式の解に対しては解の重ね合わせが自由にできるので, Fourier 成分に分けてその性質を調べれば, その重ね合わせとして $n_1(\boldsymbol{x}, t)$ が求められる. ここで $\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル, ω は角振動数である.

5.2 プラズマ振動

ここでは, プラズマの流体方程式の最も簡単な応用として, プラズマ振動を考えよう. プラズマ振動については, 講義の最初の方で簡単な議論を行った. ここでは同じ結果を線形化された流体方程式から導く. そのために以下の仮定を導入する: (1) 磁場はなし, (2) 熱運動が無視できる ($T_e = 0$), (3) イオンは空間的に一様に分布し ($n_i = n_0$), かつその質量のために考えている時間スケールでは運動しない, (4) プラズマは無限に広がっている (逆に言えば, プラズマのごく一部の領域のみを観察する), (5) 0 次の平均電場および平均流速はゼロ, とする.

用いる方程式は以下の 3 つ.

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \boldsymbol{u}_e) = 0 \tag{20}$$

$$n_e m_e \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_e}{\partial t} + \boldsymbol{u}_e \cdot \nabla \boldsymbol{u}_e \right) = -e n_e \boldsymbol{E} \tag{21}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = e(n_i - n_e) \tag{22}$$

それぞれ, 電子の連続の式, 運動方程式, Possion 方程式である．ここで, $n_e = n_0 + n_1$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1$ と展開して, ε の 1 次の項までを残す．そうして得られた連続の式を, さらに時間微分し, 現れてくる $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{E}_1$ を残りの式を使って順次消去すると,

$$\frac{\partial^2 n_1}{\partial t^2} = -\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_e} n_1 = -\omega_p^2 n_1 \tag{23}$$

を得る．すなわち, n_1 についての単振動の式に帰着する．ここで ω_p は, 以前出てきたプラズマ振動数に等しい．時間方向に Fourier 変換すれば,

$$\omega^2 = \omega_p^2 \tag{24}$$

という関係式を得る．