プラズマ物理学 I　講義メモ (第 5 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.5.30 作成)

4.3　衝突項への要請

1 体分布関数 $f_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ を扱う運動論的方程式において, 2 体衝突の効果は分布関数への演算子として表される. すなわち, 粒子種 s と s' の衝突による s 種の分布関数への影響は, Vlasov 方程式の右辺に衝突項 $C_{s,s'}(f_s, f_{s'})$ を付け加えることで導入されることになる

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f_s + \frac{q_s}{m_s}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \boldsymbol{v}} = \sum_{s'} C_{s,s'}(f_s, f_{s'}) \ . \tag{1}$$

ここで, 電子-電子衝突では, $C_{e,e}(f_e, f_e)$, 電子-イオン衝突の場合は, $C_{e,i}(f_e, f_i)$, イオン-電子衝突では, $C_{i,e}(f_i, f_e)$ という具合になる. 衝突の種類や分布関数に応じて $C_{s,s'}(f_s, f_{s'})$ の具体的な表記には様々なモデルが用いられるが, ここではそれには立ち入らない. そのかわり, 流体方程式の導出においては, 衝突項に以下の要請を課すことにしよう. ただし, 電離や再結合, 核融合反応のように, 粒子種の変化が起きないとする.

粒子保存則:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C_{s,s'}(f_s, f_{s'}) d^3v = 0 \tag{2}$$

運動量保存 (同種粒子衝突):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_s \boldsymbol{v} C_{s,s}(f_s, f_s) d^3v = 0 \tag{3}$$

運動量保存 (異種粒子衝突):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m_s \boldsymbol{v} C_{s,s'}(f_s, f_{s'}) d^3v + \int_{-\infty}^{+\infty} m_{s'} \boldsymbol{v} C_{s',s}(f_{s'}, f_s) d^3v = 0 \tag{4}$$

エネルギー保存 (同種粒子衝突):

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} m_s v^2 C_{s,s}(f_s, f_s) d^3v = 0 \tag{5}$$

エネルギー保存 (異種粒子衝突):

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} m_s v^2 C_{s,s'}(f_s, f_{s'}) d^3v + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} m_{s'} v^2 C_{s',s}(f_{s'}, f_s) d^3v = 0 \tag{6}$$

4.4　流体方程式の導出

これでようやく流体方程式を導出する準備が整った．まず, 式 (1) の 0 次モーメントを考えよう．すると, 式 (1) の第 1 項は密度の時間微分項, 第 2 項は粒子フラックスの発散項, となることは直ちに分かる．第 3 項は $\boldsymbol{v}$ で積分し, $f_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ は $|v| \to \infty$ で急速に 0 になることを要請できるので消える．第 4 項は衝突項の粒子数保存から消えて, 結局, 流体力学でなじみ深い連続の式を得る．

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \boldsymbol{u}_s) = 0\ . \tag{7}$$

次に, 式 (1) に $m_s \boldsymbol{v}$ を乗じて 1 次モーメントを計算する．第 1 項は単位体積当たりの運動量の時間変化を与える．第 2 項は, 前回述べたように, diadic $\boldsymbol{vv}$ の発散なので, 平均流 ($\boldsymbol{u}_s$) 部分とそこからの差 ($\boldsymbol{v}'$) に分けてそれぞれ積分する．平均流部分は, 運動量フラックスの発散を与え, 一方, $\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}'$ の部分からは圧力テンソルを得る．以下では $\boldsymbol{v}'$ に関して等方的な速度分布を仮定することにしよう．すなわち,

$$\nabla \cdot \mathsf{P} \to \nabla p \tag{8}$$

とする．第 3 項の計算では, まず $\boldsymbol{v}$ で部分積分し, 例によって表面積分項は消える．一方, そこで現れた $\partial \boldsymbol{v}/\partial \boldsymbol{v}$ については,

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{\partial v_i}{\partial v_j} = \delta_{ij} \tag{9}$$

を使って変形する (ここで δ_{ij} は Kronecker の delta を意味する)．最後に衝突項による運動量変化を drag として

$$\sum_{s' \neq s} \int_{-\infty}^{+\infty} m_s \boldsymbol{v} C_{s,s'}(f_s, f_{s'}) d^3 v \equiv -\sum_{s' \neq s} \boldsymbol{R}_{s,s'} \equiv -\boldsymbol{R}_s \tag{10}$$

として表すと (ただし, 運動量保存から $\boldsymbol{R}_{s,s} = 0$), s 種の粒子についての流体の運動方程式

$$m_s \left[\frac{\partial}{\partial t}(n_s \boldsymbol{u}_s) + \nabla \cdot (n_s \boldsymbol{u}_s \boldsymbol{u}_s) \right] = -\nabla p + q_s n_s (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_s \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{R}_s \tag{11}$$

を得る．左辺第 1 項は単位体積当たりの運動量の時間発展を示し, 第 2 項は運動量フラックスの発散を表している．連続の式を使って左辺を変形すると, 流体の運動方程式としてよりなじみのある形を得る

$$m_s n_s \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} + \boldsymbol{u}_s \cdot \nabla \boldsymbol{u}_s \right) = -\nabla p + q_s n_s (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}_s \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{R}_s\ . \tag{12}$$