プラズマ物理学 I　講義メモ (第 4 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.5.22 作成)

3.4　補足: ジャイロ運動

念のため, 前小節で触れたジャイロ運動についてまとめておこう. 質量 m, 電荷 q をもつ非相対論的な古典的粒子が一様磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を運動している. 電場がない場合, 磁力線に平行方向には等速運動をする. 以下では磁力線垂直方向のみを考えればよい. 粒子位置を $\boldsymbol{x}_\perp$, 速度を $\boldsymbol{v}_\perp$ とすれば,

$$\dot{\boldsymbol{x}}_\perp = \boldsymbol{v}_\perp \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_\perp = \frac{q}{m}\boldsymbol{v}_\perp \times \boldsymbol{B} = \Omega \boldsymbol{v}_\perp \times \hat{b} \tag{2}$$

[ここで $\hat{b}$ は磁場方向の単位ベクトル, $\Omega = qB/m$ はサイクロトロン (ジャイロ) 角周波数]. 式 (2) に右から $\times\hat{b}$ を作用させ, ベクトル公式を使うと

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v}_\perp \times \hat{b}) = -\Omega \boldsymbol{v}_\perp \tag{3}$$

これらから単振動の式

$$\ddot{\boldsymbol{v}}_\perp = -\Omega^2 \boldsymbol{v}_\perp \tag{4}$$

を得て, $v_x = v_\perp \cos(\Omega t + \delta)$, $v_y = -v_\perp \sin(\Omega t + \delta)$ となることが直ちにわかる (δ は初期位相). ここで $\hat{b}$ を z 軸の正の方向に取った ($B > 0$). 電荷 q の符号により Ω の正負, すなわち磁場中の回転方向が定まる ($q > 0$ のイオンは時計回り, $q < 0$ の電子は反時計回り). さらに $\boldsymbol{v}_\perp$ を時間積分して $x = r_L \sin(\Omega t + \delta) + x_0$, $y = r_L \cos(\Omega t + \delta) + y_0$ を得る. ここでジャイロ (または Larmor) 半径 $r_L = v_\perp/\Omega$.

電子サイクロトロン振動数 $f_{ce} = |\Omega_e|/2\pi$ の値を見積もってみる. 磁場 $1T$ の時, $m_e \sim 9 \times 10^{-31}$ とすると, $f_{ce} \sim 3 \times 10^{10}$Hz. 一方, 10eV の電子の速度はおよそ 2×10^6m/s だから, 磁場 $1T$ の時の電子ジャイロ半径は $|r_L| \sim 10^{-5}$m となる. これはこのエネルギーの電子がもつ de Broglie 波長よりもずっと長いことがわかる.

4　集団運動の方程式

4.1　運動論的方程式

位相空間 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 上の粒子保存から一体速度分布関数 $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ の発展方程式が導かれる.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla f + \boldsymbol{a} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = 0 \tag{5}$$

ここでは粒子間衝突は十分に小さく無視できるものとしている．これを Vlasov 方程式と呼ぶ．この式は, プラズマを構成するそれぞれの粒子種ごとに考える．$\boldsymbol{a}$ は一粒子の加速度を表し, 電磁場による場合,

$$\boldsymbol{a} = \frac{q}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{6}$$

式 (5) を位相空間 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$ 上の移流方程式と見ると, その移流速度 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a})$ は非圧縮流であることが分かる．実際, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}$ を独立変数と見た時, $\partial v_i / \partial x_i = 0$, $\partial(E_i + \epsilon_{ijk} v_j B_k)/\partial v_i = 0$ となっている．これは, Hamiltonian 流が非圧縮であることによる．つまり, Vlasov 方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial f}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial f}{\partial p_i} = 0 \tag{7}$$

とも表されるが, 正準方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \tag{8}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ , \tag{9}$$

から $(\dot{q}_i, \dot{p}_i)$ の非圧縮性は明らかであろう．同時に, 位相空間の微小体積要素の体積は不変であることが示される (Liouville の定理)．また Poisson 括弧式を用いて式 (7) は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0 \tag{10}$$

の形にも表される．すなわち f は運動の積分であり, 粒子軌道に沿って f の値は一定に保たれる

$$\frac{df}{dt} = 0 \ . \tag{11}$$

また, 通常の流体方程式における連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{12}$$

との対比は興味深い．

4.2　分布関数のモーメント量

後に運動論的方程式から流体方程式を導出するために, 分布関数のモーメント量を定義しておこう．数密度 $n(\boldsymbol{x}, t)$ は, $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ の速度空間積分

$$n(\boldsymbol{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t) d^3 v \tag{13}$$

で与えられる．これを f の 0 次モーメントと呼ぶ．次に f の 1 次モーメントは, $\boldsymbol{v}$ を f に乗じたものの速度空間積分から

$$n\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{v} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) d^3v \tag{14}$$

として決められ, 粒子フラックスを与える．$\boldsymbol{u}$ は平均流速を意味する．

さらに $\boldsymbol{u}$ に対する相対速度を $\boldsymbol{v}'$ とすれば (すなわち, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}'$), それを用いた 2 次モーメントは圧力テンソル P を与える

$$\mathsf{P} = m \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}' f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}',t) d^3v' \tag{15}$$

(ここで $\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v}' = v_i'v_j'$ は diadic)．しばしば簡単のために, f が $\boldsymbol{v}'$ に対して等方的な場合に議論が限定される．この場合, 圧力テンソルは $\mathsf{P} = p\delta_{ij}$ となり, p が通常の意味での圧力と理解される．

$$p = \frac{m}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{v}' \cdot \boldsymbol{v}' f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}',t) d^3v' \tag{16}$$

(P と p の式での $\cdot$ の有無に注意; p は $\mathrm{tr}\,\mathsf{P}/3$)．Maxwell 分布に対して $p = nT$ となることが直接確かめられる．この P を使うと, $\boldsymbol{v}$ で定義した 2 次モーメントは

$$mn\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} + \mathsf{P} = m \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) d^3v\ . \tag{17}$$

となる．ここで

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{v}' f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}',t) d^3v' = 0 \tag{18}$$

を使った．