プラズマ物理学 I　講義メモ (第 3 回)

(担当: P 研　渡邉智彦; 2014.5.19 作成)

3　プラズマ中での衝突

質量 m_1, m_2, 電荷 q_1, q_2 をもつ非相対論的な古典的粒子の衝突を考える．それぞれの位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ とした時, 運動方程式は,

$$m_1\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{1}$$

$$m_2\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{2}$$

となる．ここで, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\hat{r} = \boldsymbol{r}/r$ とする．両式の和は重心系の運動を, 差は相対運動を与える．以下では, 換算質量 $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ を使って, 2 体衝突の相対運動を

$$\mu\ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{3}$$

で与えられる中心力の問題として議論する．

3.1　大角度散乱

散乱角 θ が $\pi/2$ 程度の大きさとなるものを大角度散乱と呼ぶ．入射速度 v_0, 衝突パラメータ b_L に対して, ごくおおざっぱに, 1 回の大角度散乱での運動量の変化量を $\Delta p \sim p \sim \mu v_0$, 衝突時間を $\Delta t \sim b_L/v_0$, 平均的な力の大きさを $F \sim q_1 q_2/4\pi\epsilon_0 b_L^2$ と考える．大体, $\Delta p \sim F\Delta t$ が成り立つとすれば,

$$b_L \sim \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2} \tag{4}$$

として, 衝突断面積は $\sigma_L = \pi b_L^2$ から

$$\sigma_L \sim \pi\left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2}\right)^2 \tag{5}$$

と見積もられる．

Coulomb 力に対して, 衝突パラメータを b として, Rutherford 散乱の問題を計算すると,

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu b v_0^2} \tag{6}$$

なので, 式 (4) は, まずは妥当な見積もりといえる．

3.2　小角度散乱

多数の荷電粒子からなるプラズマ中では, 1 回の大角度散乱よりも, 小角度散乱の積み重ねが効く. 散乱方向はランダムとすると, 多数回の衝突後, 散乱角 θ の和は 0 に収束するであろう. 一方, random walk との類推から, θ^2 の積分は衝突を繰り返すごとに増大するだろう. θ^2 の積分値が 1 となると, ほぼ一回の大角度散乱に対応すると考え, これを指標として, 衝突周波数 ν を見積もることができる. すなわち, θ^2 の積分値が 1 となるまでの時間を ν^{-1} として,

$$\nu^{-1} n_2 v_0 \int \theta^2 d\sigma = 1 \tag{7}$$

ここで $d\sigma$ は微分散乱断面積で, $d\sigma = 2\pi b db$ の関係がある. また, 式 (6) から, θ も b の関数となるので, 小角度散乱の実効的な散乱断面積 σ_s は, $\sigma_s \equiv \int \theta^2 d\sigma$ として積分を用いて定義される. 小角度散乱なので, 式 (6) を, $\theta/2 \approx q_1 q_2/4\pi\epsilon_0 \mu b v_0^2$ と近似すると, $b \to \infty$ および $b \to 0$ で, この積分は対数発散してしまうことがわかる. そこで, 積分範囲の上限値と下限値を, それぞれ λ_D と b_L で与えることにしよう. これは物理的にも妥当であろうし, 積分の結果は, 積分範囲の上限値と下限値の比の対数をとるので, 多少の誤差は大勢に影響しない. その結果, 小角度散乱による実効的な衝突周波数は,

$$\nu_{12} = \frac{n_2 q_1^2 q_2^2}{2\pi\epsilon_0^2 \mu^2 v_0^3} \ln \Lambda \tag{8}$$

と書かれる. ここで, $\Lambda = n\lambda_D^3$ はプラズマ・パラメータであり, $b_L = 1/2\pi n \lambda_D^2$(同種粒子衝突に対して) と表されることを用い, また ln の中の係数 2π は省略した. 典型的なプラズマでは, $\ln \Lambda$ は 15 から 20 程度. また衝突周波数を使って, 粒子が大角度にまで散乱されるまでに移動する距離, すなわち平均自由行程は, $l_{\rm mfp} \sim v_t/\nu$.

衝突周波数のおおざっぱな見積もりを以下で見てみよう. 電子-電子衝突周波数とプラズマ振動数の比は, $(1/2)m_e v_0^2 = (3/2)T = (3/2)m_e v_{te}^2$ を使って,

$$\frac{\nu_{ee}}{\omega_p} \approx \frac{n e^4}{2\pi\epsilon_0^2 (m_e/2)^2 (\sqrt{3} v_t)^3} \frac{\lambda_D}{v_{te}} = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \sim \frac{1}{\Lambda} \ll 1 \ . \tag{9}$$

イオン-イオン衝突は,

$$\nu_{ii} = \frac{n_i Z^4 e^4}{2\pi\epsilon_0^2 \mu^2 v_0^3} \ln \Lambda = \nu_{ee} Z^3 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \tag{10}$$

ここで Z はイオンの価数を表す (水素プラズマでは, $Z = 1$). プラズマの準中性条件から, $Zn_i = n_e$. また, ln 中では電子とイオンの温度比は 1 とした.

平均自由行程を見積もってみよう.

$$l_{\mathrm{mfp}} \sim \frac{v_{ti}}{\nu_{ii}} \sim \frac{v_{te}}{\nu_{ee}} \sim \frac{v_{te}}{\omega_p}\frac{\omega_p}{\nu_{ee}} \sim \lambda_D \frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\frac{\Lambda}{\ln\Lambda} \sim n\lambda_D^4 \frac{8}{\ln\Lambda} \tag{11}$$

太陽風を想定したパラメータとして, $\lambda_D \sim 10\mathrm{m}$, $n \sim 10^7\mathrm{m}^{-3}$, $\ln\Lambda = 10$ を使うと, $l_{\mathrm{mfp}} \sim 10^{11}\mathrm{m}$ となる. 密度が $n \sim 10^6\mathrm{m}^{-3}$ まで減少すると (およそ, これくらいの範囲で変動している), $\lambda_D \propto n^{-1/2}$ だから, $l_{\mathrm{mfp}} \sim 10^{12}\mathrm{m}$ となる. 太陽-地球間の距離が 1 億 5 千万 km, すなわち, $1\mathrm{AU} = 1.5 \times 10^{11}\mathrm{m}$ だから, l_{mfp} はこれに比べて無視できない長さとなる. すなわち, 太陽風のプラズマは, 衝突の影響をほとんど受けないうちに, 地球まで到達することになる.

3.3 抵抗と拡散

電場による加速と, イオンとの衝突による減速が同時に働いているときの電子運動を考える. イオンから受ける力は, 電子-イオン衝突周波数と電子質量およびイオンと電子の相対速度に比例するとすれば, $E = \eta J$ を与える電気抵抗は,

$$\eta = \frac{\nu_{ei} m_e}{n_e e^2} = \frac{Ze^2 \ln\Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m_e v_{te}^3} \tag{12}$$

となる. これを Spitzer 抵抗とよぶ. この抵抗は, 電子密度によらず, 電子温度 T_e の 3/2 乗に反比例する. またイオンの価数に比例する. エネルギーの高い電子程イオンからの衝突を受けにくいので, 電場による加速をうけて逃走電子となり得る.

平均自由行程をランダム運動のステップ幅と考えると, 衝突を受ける粒子の拡散係数を

$$D \sim \nu l_{\mathrm{mfp}}^2 \sim \frac{v_t^2}{\nu} \sim \frac{T}{m\nu} \tag{13}$$

として見積もることができる (ただし後述するように, プラズマ中では拡散は準中性条件を保つように決まり, 両極性拡散となる). 一方, プラズマ中に十分強い磁場が存在する場合, 磁力線を横切る方向の拡散は, ジャイロ半径 ($r_L = v_t/\Omega$; Ω はジャイロ角周波数) で特徴づけられる拡散過程となることが期待される (磁場が一様な場合). すると,

$$D_\perp \sim \nu r_L^2 \sim \frac{r_L^2}{l_{\mathrm{mfp}}^2} D \sim \frac{\nu^2}{\Omega^2} D \tag{14}$$

となり, $\Omega \sim \omega_p$ と考えれば, 磁力線を横切る拡散は平行方向に比べ格段に小さくなると期待される.